2023 최신판 [개정3판]

변리사 끗 물리

개념편

김현완 지음

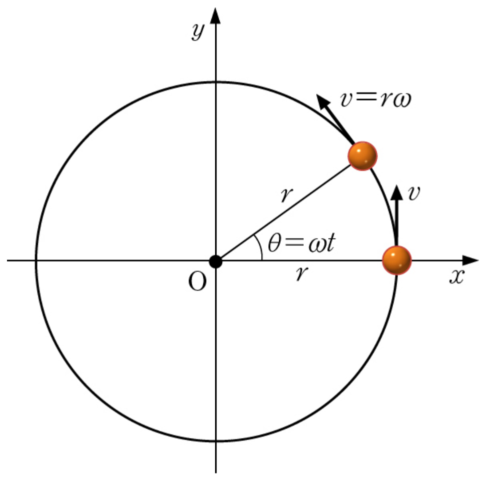
Possibility must be in Practice !

카다리 교마

Chapter 05 원운동과 단진동

등속 원운동

1. 등속 원운동 : 일정한 속력으로 원궤도를 도는 운동으로 속력은 일정하나 운동 방향이 계속 변하므로 속도가 변하는 가속도 운동이다.



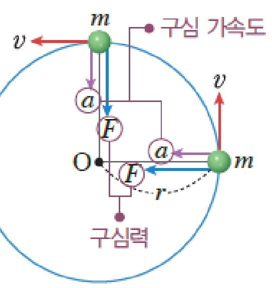
▲ 등속 원운동

- 선속도 : $v=\dfrac{s}{t}$
- 각속도 : $\omega=\dfrac{\theta}{t}$ $[rad/s]$
- $v=r\omega$ (호도각 $\theta=\dfrac{s}{r}$)
- 주기 : $T=\dfrac{2\pi r}{v}=\dfrac{2\pi}{\omega}$
- 진동수 : $f=\dfrac{1}{T}$ $[Hz]$
- 구심 가속도 : $a=\dfrac{v^2}{r}=r\omega^2$
- 구심력 : $F=\dfrac{mv^2}{r}=mr\omega^2$

2. 구심력과 구심 가속도

1) 구심력 : 등속 원운동하는 물체가 받는 알짜힘으로 크기가 일정하고 방향이 원의 중심 방향을 향하므로 계속 변한다.

$$F_r=\frac{mv^2}{r}=mr\omega^2(=ma)$$



▲ 구심력과 구심 가속도

※ 구심력은 질량 m 인 물체가 반지름 r 인 원궤도를 선속력 v 로(또는 일정한 크기의 각속도 ω 로) 등속 원운동하기 위해 필요한 힘이다. 즉, 구심력의 전제 조건은 등속 원운동이다. 구심력은 새로운 종류의 힘이 아니며, 구심이란 힘이 작용하는 방향을 나타낼 뿐이다. 자연계에 존재하는 모든 힘은 구심력으로 작용할 수 있으며, 결과적으로 구심력은 다음과 같은 특징을 갖게 된다.

"구심력은 물체의 속력을 바꾸지 않고 속도의 방향만을 바꾸어 물체를 가속시킨다."

2) 구심 가속도 : 등속 원운동하는 물체의 가속도로 크기는 일정하고 방향이 원의 중심을 향하므로 계속 변한다.

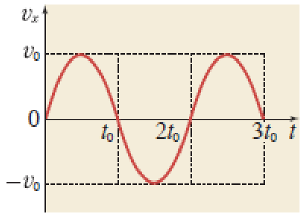
3) 원심력 : 원운동하는 물체에 작용하는 관성력 (구심력과 반대 방향으로 작용하며 크기가 같다.)

$$F_{원} = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2$$

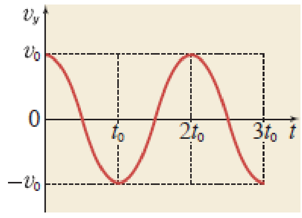
기본 예제 49

그림 (가), (나)는 xy 평면에서 원점을 중심으로 v_0 의 속력으로 등속 원운동하는 물체의 속도의 x, y 성분을 시간에 따라 각각 나타낸 것이다.

1) 주기는? 2) 각속도는?



(가)



(나)

3) 시간 t_0, $2t_0$ 에서 가속도의 방향은?

4) 시간 t_0 에서 가속도의 크기는?

1) (가)와 (나) 모두 1회 반복하는데 걸리는 시간은 $2t_0$

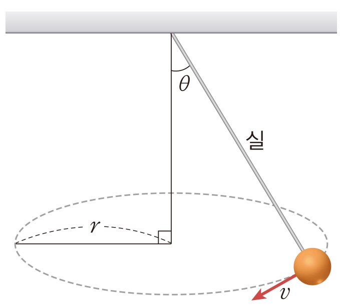
2) $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2t_0}$

3) 원운동의 반지름을 r 이라 두면 물체는 $t=0$ 일 때 $(-r\ ,\ 0)$ 에서 출발하여 시계 방향의 원운동을 한다.
가속도의 방향은 구심 방향이다.

4) $a = \frac{v_0^2}{r} = r\omega^2 = r\omega \cdot \omega = v_0 \times \frac{\pi}{t_0}$

정답 : 1) $2t_0$, 2) $\frac{\pi}{t_0}$, 3) $-x$, $+x$, 4) $\frac{\pi v_0}{t_0}$

기본 예제 50

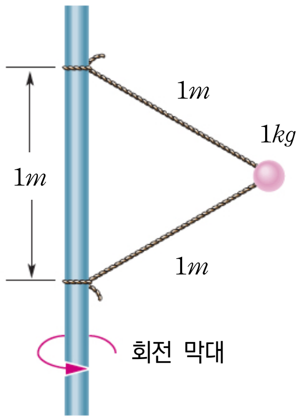


그림과 같이 물체가 실에 매달린 상태로 일정한 속력 v 로 등속 원운동 한다. 실이 연직 방향과 이루는 각도는 θ 이고, 원 궤도가 이루는 면은 수평이다. 원운동 반지름 r 은? (단, 중력 가속도는 g 이다.)

$\frac{mv^2}{r} = mg\tan\theta$

정답 : $\frac{v^2}{g\tan\theta}$

기본 예제 51



그림은 길이가 $1m$ 인 두 실을 중력 가속도 방향으로 설치된 막대와 물체에 연결하여 막대를 회전시켰더니 질량이 $1kg$ 인 물체가 막대와 함께 등속 원운동을 하는 것을 나타낸 것이다. 실이 막대에 고정된 두 지점 사이 거리는 $1m$ 이고, 하나의 실에 걸리는 장력의 크기는 다른 실에 걸리는 장력의 크기의 2배이다. (단, 중력 가속도는 $10m/s^2$ 이고, 실의 질량과 공기 저항 및 막대의 두께는 무시한다.)

1) 두 실에 걸리는 장력의 크기는?

2) 물체의 원운동 속력은?

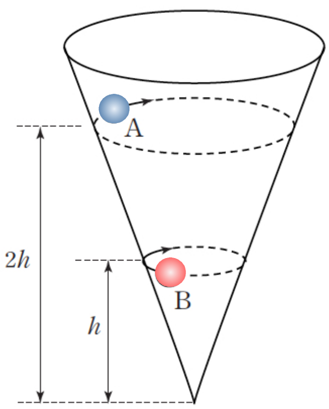
1) $2T\cos60^\circ = T\cos60^\circ + 10 \;\; \therefore \;\; T = 20N$

2) $40\sin60^\circ + 20\sin60^\circ = \dfrac{1 \times v^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

정답 : 1) $40N$, $20N$, 2) $3\sqrt{5}\,m/s$

기본 예제 52

그림과 같이 중심축이 중력 가속도와 나란한 원뿔의 안쪽면을 따라 원운동하는 질량이 같은 두 물체 A, B가 있다. A는 $2h$ 의 높이에서, B는 h 의 높이에서 각각 원운동을 한다. (단, 모든 마찰과 공의 크기는 무시한다.)



1) 구심력 크기의 비는?

2) 속력의 비는?

3) 각속력의 비는?

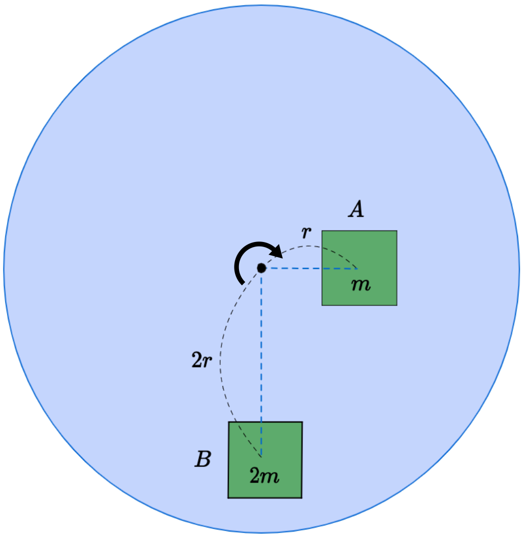
4) 회전 주기의 비는?

5) 수직 항력 크기의 비는?

1) 원뿔 경사면과 수평면이 이루는 각을 θ 로 두면 $F_r = mg\tan\theta$, 2) $mg\tan\theta = \dfrac{mv^2}{r}$; $v = \sqrt{g\tan\theta \times r}$

3) $mg\tan\theta = mr\omega^2$; $\omega = \sqrt{\dfrac{g\tan\theta}{r}}$, 4) $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, 5) $N\cos\theta = mg$

정답 : 1) $1:1$, 2) $\sqrt{2}:1$, 3) $1:\sqrt{2}$, 4) $\sqrt{2}:1$, 5) $1:1$

기본 예제 53	
	그림은 회전하는 수평 원판 위에 질량이 m 인 물체 A와 질량이 $2m$ 인 물체 B가 원판 위에서 미끄러지지 않고 원판과 함께 반지름이 각각 r , $2r$ 인 원운동을 하는 것을 나타낸 것이다. 원판과 A, B 사이 정지 마찰 계수는 μ 이다. 1) 구심력 크기의 비는? 2) 원운동 속력의 비는? 3) 회전 운동 에너지의 비는? 4) 원판의 회전 속도를 증가시킬 때, 먼저 미끄러지는 물체는?

1) $F_r = mr\omega^2$, 2) $v = r\omega$, 3) $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2$

4) A가 미끄러지는 순간 : $\mu mg = mr\omega^2$; $\omega^2 = \frac{\mu g}{r}$, B가 미끄러지는 순간 : $\mu(2m)g = (2m)(2r)\omega'^2$; $\omega'^2 = \frac{\mu g}{2r}$

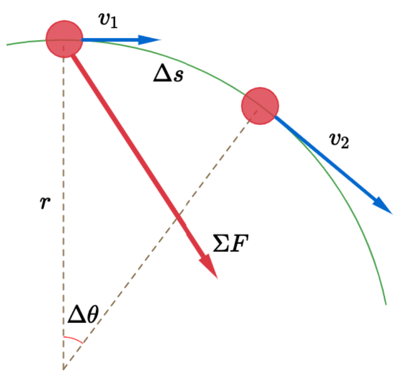
정답 : 1) $1:4$, 2) $1:2$, 3) $1:8$, 4) B

2. 비등속 원운동

원운동하는 물체에 대한 알짜힘($\sum F$)이 구심방향이 아닌 경우 비등속 원운동을 하게 되며, 물체는 구심방향의 가속도와 접선방향의 가속도를 갖는 것으로 볼 수 있다. 즉, 구심 방향의 구심력에 의해서 등속 원운동을 하면서, 접선 방향의 힘에 의해서 속력이 변하는 것이다.

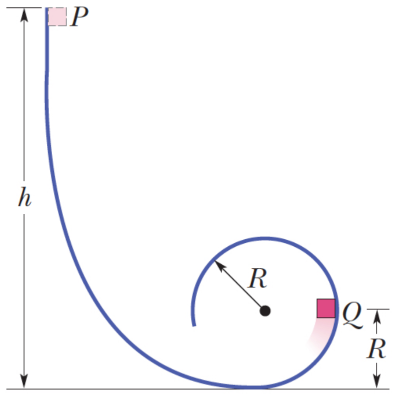
$$s = r\theta \ , \ v = r\omega \ , \ a_t = r\alpha \quad (a_r = r\omega^2)$$

※ 회전축이 고정된 속력이 변하는 회전 운동(원운동)에서 물체의 가속도 또는 알짜힘은 중심을 향하지도, 접선 방향을 향하지도 않기 때문에 쉽게 접근하기 위하여 중심 방향 성분과 접선 방향 성분으로 분해하여 생각한다.



▲ 비등속 원운동

기본 예제 54



그림과 같이 지면으로부터 높이 h 인 P점에 물체를 가만히 놓았더니 곡선경로를 따라 운동을 하는 물체가 지면으로부터 높이 R 인 Q점을 통과한다. 물체는 지면에 도달한 직후부터 반지름이 R 로 일정한 원형 궤도를 따라 운동한다. (단, 공기의 저항과 마찰은 무시한다.)

1) 물체가 원형 궤도의 최고점을 통과하기 위한 최소한의 P점의 높이 h 는?

2) 물체가 Q점을 통과할 때 수직항력의 크기가 물체 중력의 크기의 4배일 때, 최고점에서 물체가 받는 수직 항력의 크기는 Q점의 몇 배인가?

1) 원운동을 하기 위해서는 운동하는 동안 궤도로부터 수직항력을 받아야 한다. 최소 조건은 최고점을 통과하는 순간 수직항력이 0이다. 최고점 : $mg = \dfrac{mv_H^2}{R}$, 역학적 에너지 보존 : $mg(2R) + \dfrac{1}{2}mv_H^2 = \dfrac{5}{2}mgR = mgh$

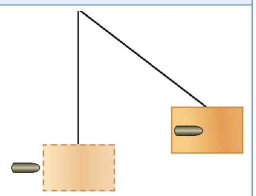
2) Q : $4mg = \dfrac{mv_Q^2}{R}$, 최고점 : $N + mg = \dfrac{mv_H^2}{R}$, 역학적 에너지 보존 : $\dfrac{1}{2}mv_Q^2 - \dfrac{1}{2}mv_H^2 = mgR$

; $4mgR - (N+mg)R = 2mgR \quad \therefore \quad N = mg$

정답 : 1) $\dfrac{5}{2}R$, 2) $\dfrac{1}{4}$배

기본 예제 55

그림과 같이 질량이 m 인 총알이 질량이 m 인 나무도막에 박혀 함께 운동한다. 나무도막은 연직 벽면에 고정된 못에 걸린 줄에 매달려 있으며 줄의 길이는 R 이다. 총알과 충돌 후 나무도막이 원궤도를 그리며 다시 원위치로 돌아 올 수 있는 총알의 최소 속력은? (단, 공기 저항은 무시한다.)



원운동을 하기 위해서는 운동하는 동안 줄의 장력이 있어야 한다. 최소 조건은 최고점을 통과하는 순간 장력이 0이다.

최고점 : $2mg = \dfrac{2mv_H^2}{R}$

최저점과 최고점에서의 역학적 에너지 보존 : $\dfrac{1}{2}(2m)v_L^2 = (2m)g(2R) + \dfrac{1}{2}(2m)v_H^2 = 5mgR \quad \therefore \quad v_L = \sqrt{5gR}$

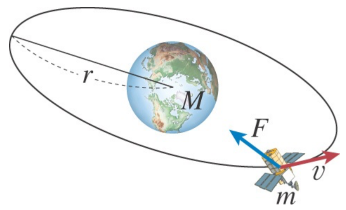
충돌 : $mv = (2m)v_L$

정답 : $2\sqrt{5gR}$

중력에 의한 운동

1. 인공 위성의 운동 (등속 원운동으로 간주)

1) 인공 위성의 역학적 에너지



▲ 인공 위성의 운동

역학적 에너지 : $E = \frac{1}{2}mv^2 + (\frac{-GMm}{r})$

구심력 : $F_r = \frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$

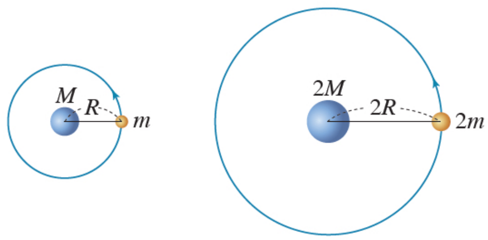
인공위성의 운동에너지 : $E_k = \frac{GMm}{2r}$

따라서, 인공위성의 역학적 에너지 : $E = -\frac{GMm}{2r}$

2) 인공위성의 탈출 속도 : 인공위성의 역학적 에너지는 음(-)의 부호를 갖는다. 이것은 인공위성이 지구로부터 속박되어 있음을 의미한다. 따라서 인공위성이 지구 중력장으로부터 탈출하기 위해서는 최소한의 일 $\frac{GMm}{2r}$ 만큼을 받아야 한다.

탈출 속도 : $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$

기본 예제 56



(가) (나)

그림 (가)는 질량이 m 인 위성이 질량이 M 인 행성을 중심으로 궤도 반지름이 R 인 등속 원운동을 하는 모습을 나타낸 것이고, (나)는 질량이 $2m$ 인 위성이 질량이 $2M$ 인 행성을 중심으로 궤도 반지름이 $2R$ 인 등속 원운동을 하는 모습을 나타낸 것이다. 이에 대한 설명으로 옳은 것은?

ㄱ. 두 위성이 행성으로부터 받는 중력의 크기는 같다.

ㄴ. 구심 가속도의 크기는 (가)가 (나)의 2배이다.

ㄷ. 공전 주기는 (나)가 (가)의 2배이다.

ㄱ. (가) $G\frac{Mm}{R^2}$, (나) $G\frac{(2M)(2m)}{(2R)^2}$

ㄴ. (가) $G\frac{M}{R^2}$, (나) $G\frac{2M}{(2R)^2}$

ㄷ. $mr\omega^2 = G\frac{Mm}{r^2}$; $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$

정답 : ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 케플러의 법칙

※ 케플러의 법칙

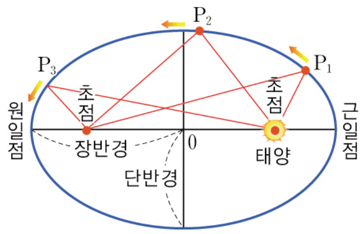
제 1 법칙 (타원 궤도 운동의 법칙) : 모든 행성의 궤도는 태양을 하나의 초점에 두는 타원 궤도이다.

제 2 법칙 (면적 속도 일정의 법칙) : 태양과 행성을 잇는 직선은 항상 일정한 넓이를 훑고 지나간다.

제 3 법칙 (조화의 법칙) : 행성의 공전 주기의 제곱은 궤도 장반경의 세제곱에 비례한다.

1) 케플러의 제 1 법칙 (타원 궤도 운동의 법칙)

행성은 태양을 한 초점으로 하는 타원 궤도를 그리면서 공전한다는 것으로 타원 궤도의 법칙이라고 한다. 행성의 궤도에서 태양으로부터의 거리가 가장 가까운 점을 근일점 , 가장 먼 점을 원일점이라고 한다.

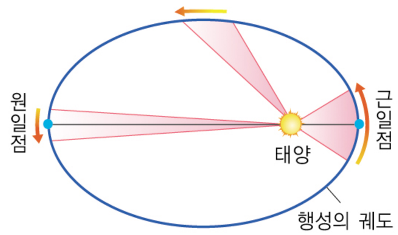


▲ 타원 궤도의 법칙

2) 케플러의 제 2 법칙 (면적 속도 일정의 법칙)

행성과 태양을 연결하는 가상적인 선분이 같은 시간 쓸고 지나간 면적은 항상 같다는 법칙이다.

근일점 근처에서 태양과 행성을 잇는 직선이 쓸고 간 면적과 원일점 근처에서 태양과 행성을 잇는 직선이 쓸고 간 면적이 같으려면 태양까지의 거리가 짧은 근일점 근처에서 행성이 궤도를 이동한 거리가 원일점보다 커야 한다. 즉, 근일점 근처에서 행성의 속력이 빠르고 원일점 근처에서 행성의 속력이 느리다.



▲ 면적 속도 일정의 법칙

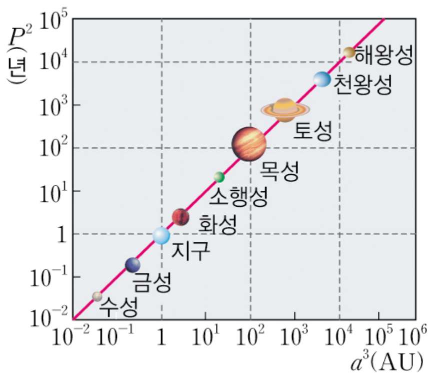
3) 케플러의 제 3 법칙 (조화의 법칙)

태양계에 있는 각 행성의 공전 주기의 제곱은 각 행성 타원 궤도의 장반지름의 세제곱에 비례한다는 법칙이다.

-행성이 태양 주위를 도는 것은 만유인력이 구심력의 역할을 하기 때문이다. 질량이 m 인 행성이 태양으로부터의 거리가 r 인 곳에서 원운동 할 때 구심력(F)의 크기는 $F = \frac{mv^2}{r}$ (v : 공전 속도) 이므로 $G\frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$ (M : 태양의 질량)

즉, $v^2 = \frac{GM}{r}$ 이다. 행성의 공전 주기(P)와 공전 속도의 관계는

$v = \frac{2\pi r}{P}$ 이므로 이를 대입하면 $\frac{r^3}{P^2} = \frac{GM}{4}\pi^2 = k$ (일정)이다.



▲ 조화의 법칙

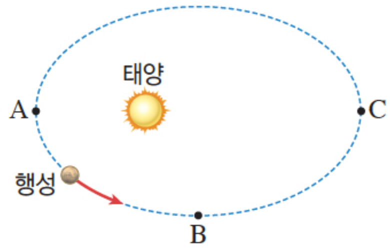
기본 예제 57

그림은 어떤 행성이 태양을 한 초점으로 타원 궤도를 따라 운동하는 경로를 나타낸 것이다. 이에 대한 설명으로 옳은 것은?

ㄱ. 행성의 운동 에너지는 A에서가 B에서보다 크다.

ㄴ. 행성이 태양으로부터 받는 중력의 크기는 A에서가 C에서보다 작다.

ㄷ. A에서 B까지 운동 시간은 B에서 C까지 운동 시간보다 짧다.



ㄱ. 근일점에서 가장 빠르고 원일점에서 가장 느리다.

ㄴ. 태양으로부터 거리는 A에서가 C에서보다 작다.

ㄷ. A → B까지의 평균 속력이 B → C까지의 평균 속력보다 크다.

정답 : ㄱ, ㄷ

진동

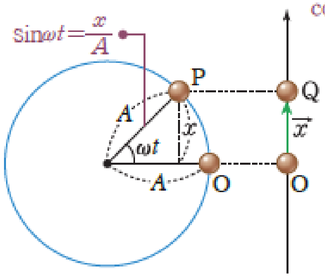
1. 단순 조화 운동(단진동)

운동 중 주기적으로 왕복 운동하는 것을 진동이라고 한다. 진동은 안정된 평형점 근처에서 일어난다. 물체에 작용하는 힘이 물체를 평형점으로 되돌아오도록 작용할 경우 물체는 평형점 사이에서 왕복 운동을 하게 된다. 이처럼 평형점으로 돌아오도록 작용하는 힘을 복원력이라고 하고 복원력의 크기가 평형점에서 벗어난 변위의 크기에 비례할 때 단조화 운동이 일어난다. 일반적으로 복원력의 크기가 변위의 크기에 비례할 필요는 없지만 많은 경우 평형점 근처에서 근사적으로 변위의 크기에 비례하는 복원력으로 간주할 수 있다. 즉 진폭이 크지 않은 진동 운동의 경우 단조화 운동으로 설명할 수 있다.

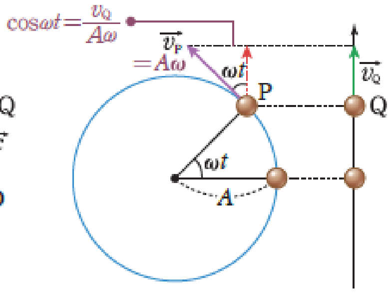
- 변위(x) : 평형점으로부터 물체의 위치 (벡터)
- 진폭(A) : 평형점으로부터 최대 변위의 크기 (스칼라)
- 복원력 : 단진동하는 물체가 받는 진동 중심을 향하는 힘 : $F=-m\omega^2 x=-\beta x$
- 단진동 주기

$$m\omega^2 x=\beta x \ ; \ \omega=\frac{2\pi}{T} \ ; \ T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\beta}}$$

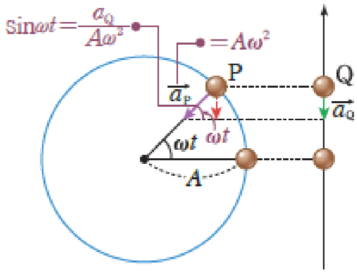
2. 등속 원운동과 단진동



▲ 단진동의 변위

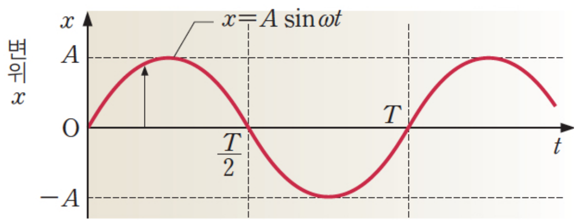


▲ 단진동의 속도

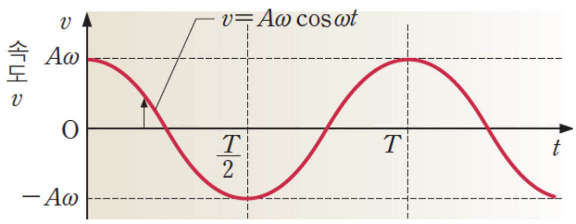


▲ 단진동의 가속도

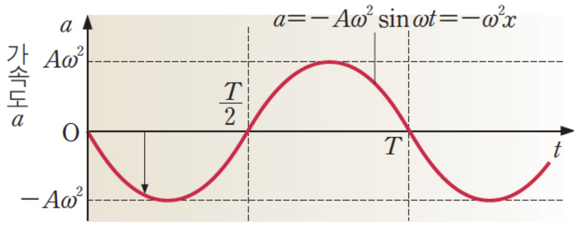
변위	속도	가속도
$\vec{x} = A\sin\omega t$	$\overrightarrow{v_Q} = A\omega\cos\omega t$	$\overrightarrow{a_Q} = -A\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 x$



▲ 단진동에서 시간에 변위의 변화



▲ 단진동에서 시간에 대한 속도의 변화

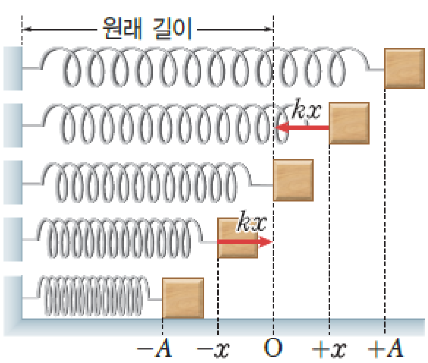


▲ 단진동에서 시간에 대한 가속도의 변화

단조화 운동에서 가속도의 방향은 변위 방향과 항상 반대이다.

3. 용수철 진자

1) 수평 방향 진동



▲ 수평방향 용수철 진자 운동

복원력 : $F_x = -kx = -m\omega^2 x$; $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

가속도 : $a = \frac{k}{m}x$

주기 : $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

역학적 에너지 보존

: $E = E_p + E_k = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mV^2 =$ 일정

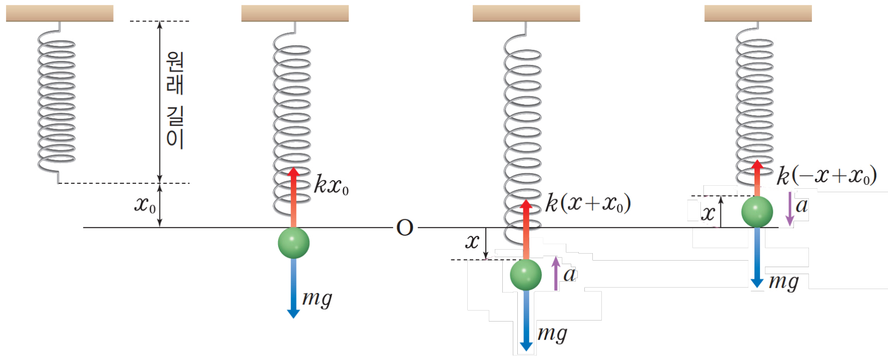
기본 예제 58

용수철 상수가 k 인 수평 방향으로 놓여진 용수철에 매달린 질량 m 인 물체가 진폭 A로 진동한다. 평형점 $x=0$ 를 $+x$ 방향으로 통과하여 $x=\frac{A}{2}$ 까지 이동하는데 걸리는 시간은? (단, 용수철의 질량과 모든 마찰은 무시한다.)

$x=A\sin\omega t$; $\frac{A}{2}=A\sin\omega t$ $\therefore$ $\sin\omega t=\frac{1}{2}$; $t=\frac{1}{\omega}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}\cdot\sqrt{\frac{m}{k}}$

정답 : $\frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{m}{k}}$

2) 연직 방향 진동



▲ 연직 방향 용수철 진자 운동

평형점 : $mg=kx_0$

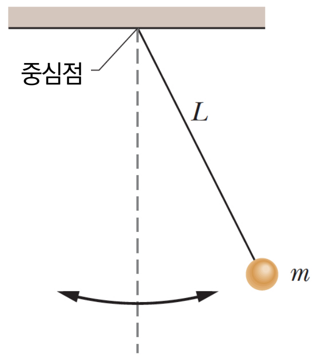
복원력 : $F_x=mg-k(x_0+x)=-kx=-m\omega^2x$; $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

가속도 : $a=\frac{k}{m}x$

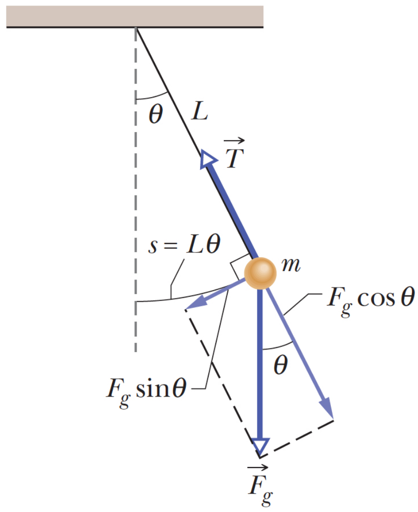
주기 : $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

역학적 에너지 보존 : $E=E_{p(\text{탄성력})}+E_{p(\text{중력})}+E_k=$ 일정

4. 단진자 (진폭이 매우 작을 때에만 단진동으로 간주)



▲ 단진자 운동



▲ 단진자 운동의 힘 분석

복원력 : $F_x = -mg\sin\theta \fallingdotseq -\dfrac{mg}{L}x = -m\omega^2 x$; $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$

가속도 : $a = \dfrac{g}{L}x$

주기 : $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

역학적 에너지 보존 : $E = E_p + E_k =$ 일정

※ 진자 운동에서 진동 중심 : 복원력은 0이지만 알짜힘이 구심력으로 작용한다. (진폭이 매우 작은 단진자 운동의 경우 알짜힘은 0으로 간주할 수 있다.)

기본 예제 59

질량 m 인 입자가 반지름 R 인 반구 형태의 그릇 내부에서 미끄러진다. 그릇 내부에서 평형 위치로부터 입자의 변위가 매우 작을 때 입자의 운동 주기는 T 이다. 동일한 입자를 길이 R 인 실에 연결하여 단진자 운동을 시킬 때 주기는? (단, 마찰과 공기 저항 및 실의 질량은 무시한다.)

$mg\sin\theta = m\omega^2 x$ (θ 가 매우 작을 때 $\sin\theta \fallingdotseq \dfrac{x}{R}$)

$\omega = \sqrt{\dfrac{g}{R}}$; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$

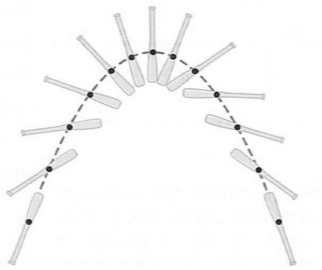
정답 : T ($\omega = \sqrt{\dfrac{g}{R}}$)

Chapter 06 강체 역학

질량 중심

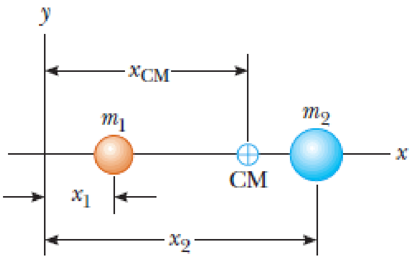
물체를 구성하는 질량을 가진 모든 입자들의 평균적인 위치를 의미한다. 질량 중심은 물체를 이루는 각 입자의 질량에 위치벡터를 곱한 것을 모두 더해서 물체의 전체 질량으로 나누어 구할 수 있다. 물체를 이루는 모든 입자에 미치는 총 힘은 결국 외력을 의미하게 된다. 내력은 작용-반작용에 의해 서로 상쇄되기 때문이다.

1. 질량 중심 : 물체나 물체들로 이루어진 계의 질량 중심은 1) 모든 질량이 그 점에 모여 있고 2) 외력이 모두 그 점에 작용하는 것처럼 움직이는 특별한 점이다. 강체의 경우 질량 중심에 중력이 작용하는 것으로 간주하여 질량 중심의 위치 변화로 중력 퍼텐셜 에너지 변화를 측정한다.



◀ 야구방망이의 질량 중심은 간단한 포물선 경로로 움직이지만 다른 점들은 복잡한 경로를 따른다.

2. 입자계의 질량 중심



▲ 질량 중심

$$x_{com} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

n 개의 입자가 x 축 위에 놓여 있는 일반식은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$x_{com} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{M} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

만일 입자들이 3차원으로 분포되어 있다면 질량중심은 세 좌표로 표기하여야 한다.

질량중심 좌표 $(x_{com},\ y_{com},\ z_{com})$ = $\left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\ ,\ \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i\ ,\ \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i\right)$

이를 일반화된 벡터방정식으로 표현하면 $\vec{r}_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$

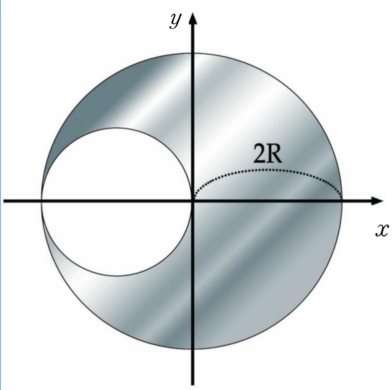
3. 고체(강체)의 질량 중심

일반적으로 고체는 수많은 입자를 포함하므로, 물질이 연속적으로 분포한 것으로 생각할 수 있다.

$$x_{com} = \frac{1}{M}\int xdm,\ y_{com} = \frac{1}{M}\int ydm,\ z_{com} = \frac{1}{M}\int zdm$$

※ 밀도가 균일한 물체의 질량중심은 대칭점, 대칭선, 또는 대칭면 위에 있다.

기본 예제 60



그림과 같이 반지름 $2R$ 의 균일한 금속 원판 P 에서 반지름 R 의 원판을 P 의 가장 자리에서 떼어냈을 때 판 P 의 질량중심은?

작은 원판을 떼어내기 전의 질량 중심은 원점이다. 판 P와 떼어낸 원판에 의한 질량 중심이 원점이다.

y 방향으로는 질량 중심의 좌표가 0으로 변하지 않으므로 x 방향의 질량 중심 좌표만 계산한다.

작은 원판을 떼어내기 전의 전체 질량을 M 으로 두면, 떼어낸 작은 원판의 질량 = $M \times \frac{\pi R^2}{\pi(2R)^2} = \frac{1}{4}M$

$$0 = \frac{(\frac{3}{4}M)x + (\frac{1}{4}M)(-R)}{M} \quad \therefore\ x = \frac{1}{3}R$$

정답 : $\frac{1}{3}R$

기본 예제 61

질량이 $1kg$, $2kg$, $3kg$ 인 세 입자가 xy 평면에서 한 변의 길이가 $1m$ 인 정삼각형의 꼭지점에 각각 놓여 있을 때 계의 질량중심의 좌표는? (단, $1kg$ 입자의 좌표는 (0, 0), $2kg$ 입자의 좌표는 (1, 0)이다.)

x : $x_{com} = \frac{2\times1+3\times\frac{1}{2}}{6} = \frac{7}{12}$, y : $y_{com} = \frac{3\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

정답 : $(\frac{7}{12}, \frac{\sqrt{3}}{4})$

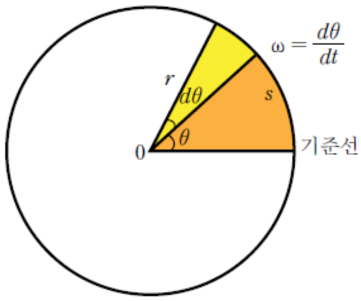
강체의 회전 운동

1. 강체 : 많은 질점으로 구성되어 있고 각 질점들 사이의 거리가 힘이나 회전력에 의해 변하지 않는 물체

2. 회전 운동

1) 각속도와 각가속도

중심을 통과하는 수직축을 중심으로 자유롭게 회전하는 원판을 나타낸 것이다. 원판이 회전할 때 각 부분은 서로 다른 속력으로 회전하지만 모두 같은 시간에 한 바퀴를 회전한다. 즉, 같은 시간에 모두 같은 각도만큼 회전한다. 따라서 원판의 회전 각도는 원판의 회전 운동을 설명할 수 있는 좋은 변수가 되고 속력보다는 각속도가 더 적절한 변수가 된다.



▲ 회전 운동

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad [rad/s] \;,\; \alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad [rad/s^2]$$

$s = r\theta$, $v = r\omega$, $a_t = r\alpha$ (a_t : 접선방향 가속도)

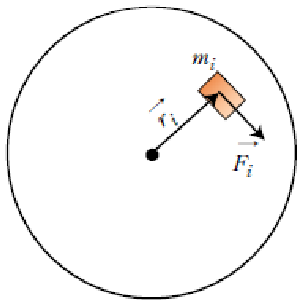
($a_r = r\omega^2$: 구심 방향 가속도)

2) 토크(돌림힘)와 회전관성

① 토크 : 물체에 작용하여 물체를 회전시키는 원인이 되는 물리량으로서 돌림힘이라고 한다. (벡터)

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad [N \cdot m]$$

※ 벡터 곱의 방향이므로 토크의 방향은 $\vec{r}$ 이 향하는 쪽으로 오른손 네 손가락을 뻗은 다음 네 손가락을 $\vec{r}$ 에 대해 $\vec{F}$ 가 있는 쪽으로 감아쥘 때 똑바로 세운 엄지손가락의 방향(오른 나사 법칙)이다. (토크를 정의하는 벡터 곱의 $\vec{r}$ 과 $\vec{F}$ 의 순서는 원칙적으로는 토크가 작용하여 생기는 물체의 각가속도와 작용한 토크의 방향이 일치하도록 맞추어야 한다.)



▲ 토크의 방향

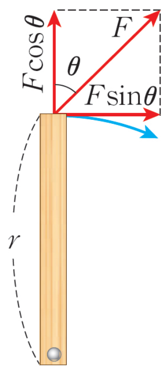
② 토크의 크기

- F 와 r 이 수직일 때 : 작용한 힘 F 와 힘의 작용선과 회전 중심 사이의 수직 거리(회전축) r 과의 곱으로 나타낸다.

$$\tau = r \times F$$

- F 와 r 이 수직이 아닐 때 : 작용한 힘 F 중 r 과 수직 성분만이 회전에 사용된다.

$$\tau = r \times F\sin\theta$$

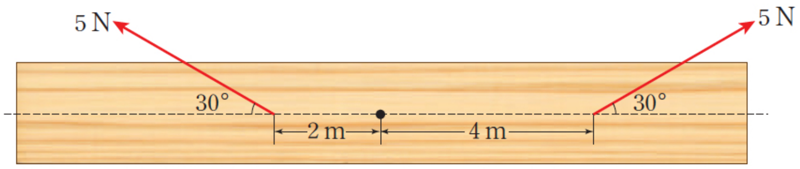


▲ 물체의 돌림힘 (토크)

③ 토크의 단위 : 힘의 단위와 길이의 단위의 곱인 $[N \cdot m]$를 사용한다. 다만, 토크는 방향을 갖는 물리량이므로 $[J]$을 사용하지 않는다.

기본 예제 62

그림과 같이 막대의 중심이 고정되어 막대가 자유롭게 회전할 수 있다. 크기가 $5N$ 인 두 힘이 그림과 같이 주어진 위치에 작용한다. 막대의 중심점을 기준으로 하는 돌림힘(토크)의 크기와 회전 방향은?

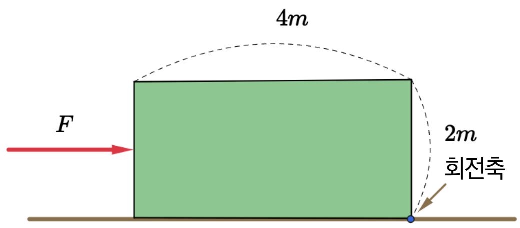


$(+2\times 5\sin 30^\circ)+(-4\times 5\sin 30^\circ)$

정답 : $5N\cdot m$, 시계 반대 방향

기본 예제 63

그림은 수평면에 놓여 있는 직육면체 모양의 질량이 m 인 밀도가 균일한 물체를 나타낸 것이다. 물체의 왼쪽면 정가운데 지점에 수평면과 나란한 힘 F 를 작용하여 고정된 회전축을 중심으로 물체를 회전시킬 때, 물체가 회전하기 필요한 F 의 최소 크기는? (단, 중력 가속도는 g 이다.)

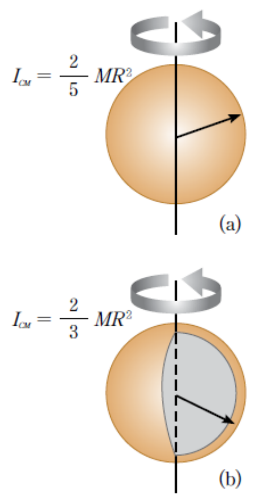


$1\times F=2\times mg$

정답 : $2mg$

④ 관성모멘트(회전관성) : 관성 모멘트는 회전상태를 계속 유지하려고 하는 성질의 크기를 말하는 것이다. 병진상태를 계속 유지하려고 하는 관성과 비교하면 된다.
즉, 질량이 클수록 관성이 크고, 관성 모멘트가 클수록 회전 관성이 크다.
(질량을 병진운동 변화에 대한 저항으로, 관성 모멘트를 회전운동 변화에 대한 저항으로 볼 수 있다.)

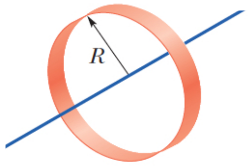
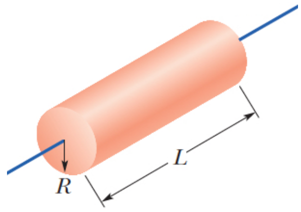
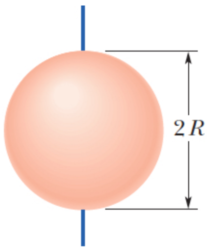
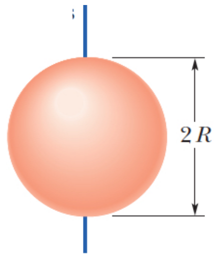
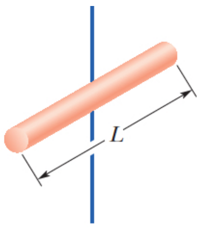
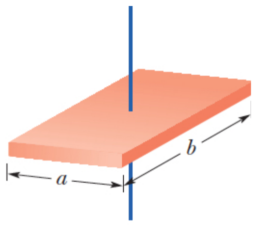
$$I=\sum m_i r_i^2$$
$$I=\int r^2 dm=\rho\int r^2 dV=\beta m r^2$$



▲ 관성모멘트

- 평행축 정리 : 관성 모멘트 I 는 회전축을 어디에 두느냐에 따라 값이 달라진다.

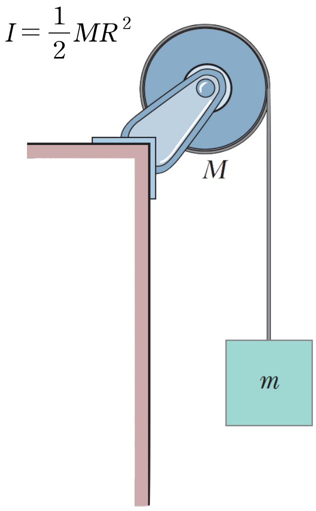
$$I = I_{CM} + Md^2 \ (I_{CM} \text{ : 질량중심을 회전축으로 두었을 때 관성 모멘트})$$

강체의 종류	관성 모멘트	강체의 종류	관성 모멘트
축에 대한 원통 껍질 $I = MR^2$		축에 대한 속이 찬 원통 $I = \frac{1}{2}MR^2$	
지름에 대한 구 껍질 $I = \frac{2}{3}MR^2$		지름에 대한 속이 찬 구 $I = \frac{2}{5}MR^2$	
중심 수직축에 대한 가는 막대 $I = \frac{1}{12}ML^2$		중심 수직축에 대한 사각 평면 $I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$	

기본 예제 64
질량이 m 이고 길이가 L 인 균일한 가는 막대의 끝에 질량이 m 인 입자를 붙여 두었다. 막대 길이에 대해 수직한 회전축이 막대 끝에 있을 경우 막대의 회전 관성은 $\frac{1}{3}mL^2$ 이다. 회전축이 막대의 수직 이등분선이 되는 경우 막대와 입자의 회전관성은?
$I = I_1 + I_2 = \left(\frac{1}{3}mL^2 - m(\frac{L}{2})^2\right) + \left(m(\frac{L}{2})^2\right)$ 정답 : $\frac{1}{3}mL^2$

⑤ 회전 운동 방정식

$\Sigma\tau = I\alpha$; 물체에 작용하는 알짜 토크가 각가속도를 발생시킨다.



▲ 병진 운동과 회전 운동

[회전 운동 방정식의 병진 운동 방정식화 ; $\Sigma F = \beta m \times a_t$]

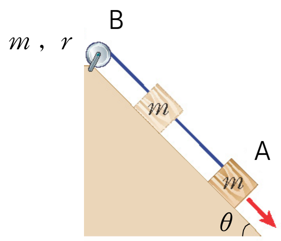
도르래 위에서 줄이 미끄러지지 않고 도르래를 회전시킬 경우 도르래는 줄에 의해 토크가 발생하여 각가속도 운동을 하게 된다. 줄의 이동 거리와 물체의 이동 거리는 매 순간 같으므로 줄의 한 지점에서의 가속도는 물체의 가속도와 같다. 도르래 끝 지점에서 줄에 의한 장력의 방향과 가속도의 방향은 접선 방향이므로 $a = R\alpha$ 이다.

$$R \times T = \frac{1}{2}MR^2 \times \alpha = \frac{1}{2}MR^2 \times \frac{a}{R} \;\; ; \;\; T = \frac{1}{2}Ma \text{ (회전 운동의 병진 운동화)}$$

물체의 운동 방정식은 $mg - T = ma$ 이므로 물체를 포함하여 병진 운동 방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$mg = (m + \frac{1}{2}M)a$$

기본 예제 65



그림은 질량이 m 인 물체 A에 연결된 실이 질량과 반지름이 각각 m , r 인 도르래 B에 여러 번 감겨 있는 것을 나타낸 것이다. A를 경사각이 θ 인 빗면에 가만히 놓았더니 등가속도 운동을 한다. 실에 걸리는 장력의 크기는? (단, 실은 도르래에서 미끄러지지 않고, 도르래의 질량 중심에 대한 관성모멘트는 $\frac{1}{2}mr^2$ 이다. 중력 가속도는 g 이고, 실의 질량, 도르래와 도르래 축과의 마찰, 공기 저항, 빗면과 A 사이의 마찰은 무시한다.)

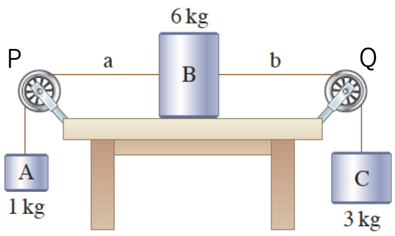
A) $mg\sin\theta - T = ma$, B) $r \times T = I\alpha = \frac{1}{2}mr^2 \times \frac{a}{r}$; $T = \frac{1}{2}m \cdot a$

1set) $mg\sin\theta = (m + \beta m)a = \frac{3}{2}ma$

정답 : $\frac{1}{3}mg\sin\theta$

기본 예제 66

그림과 같이 질량이 각각 $1kg$, $6kg$, $3kg$ 인 물체 A, B, C를 도르래 P, Q를 통해 줄 a, b로 연결하였다. P, Q는 반지름이 $0.5m$ 로 같고, 도르래 회전축에 대한 관성 모멘트는 P가 $1kg \cdot m^2$, Q가 $1.5kg \cdot m^2$ 이다. 세 물체가 운동을 할 때, 줄은 도르래에서 미끄러지지 않고 P, Q를 회전시킨다. B의 가속도 크기는? (단, 중력 가속도는 g 이고, 줄의 질량, 도르래와 도르래 축과의 마찰, B와 수평면 사이 마찰, 공기 저항은 무시한다.)

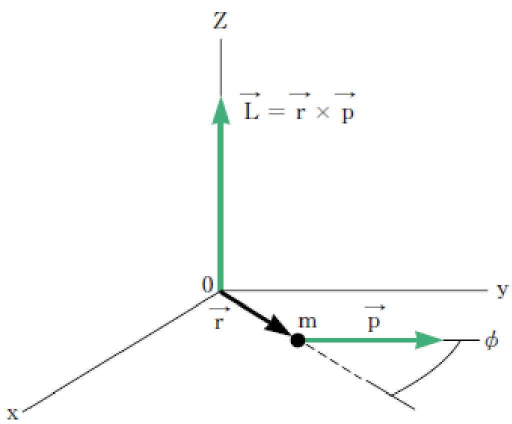


p : $1kg \cdot m^2 = 4 \times (\frac{1}{2})^2$, q : $1.5kg \cdot m^2 = 6 \times (\frac{1}{2})^2$

1set) $30 - 10 = (1+6+3+4+6) \times a$

정답 : $1m/s^2$

3. 각운동량 : 선운동량에 대응하는 회전운동의 각운동에 대한 물리량 (벡터)



▲ 각운동량

$L = I\omega$ ($\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$)

(각운동량의 방향은 물체의 한 대칭축이 회전축이 되면 각운동량의 방향은 각속도의 방향과 나란하게 된다.)

각운동량 보존 법칙

외부에서 토크가 작용하지 않으면 각운동량은 보존된다.

$I\omega = I'\omega'$

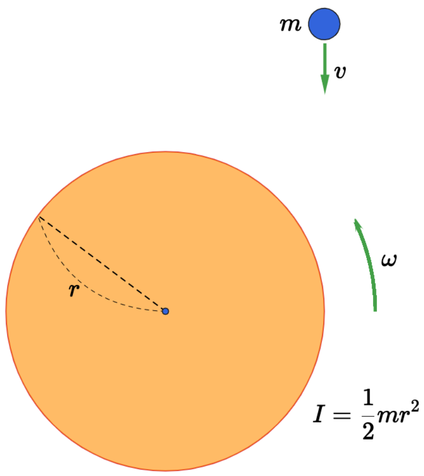
기본 예제 67

관성 모멘트가 $30kg \cdot m^2$ 인 지름 $2m$ 의 원형 회전판이 2초의 주기로 회전하고 있다. 질량이 $30kg$ 인 어린이가 지름방향으로 이 회전판 가장자리에 뛰어올라 회전판과 어린이가 함께 회전할 때 회전 주기는?

$I\omega = I'\omega'$; $30 \times \omega = (30 + 30 \times 1) \times \omega'$

정답 : 4초

기본 예제 68



그림과 같이 질량 중심이 회전축으로 고정된 일정한 각속도 ω 로 회전하는 반지름이 r 인 균일한 원판의 가장자리에 질량이 m , 속력이 v 인 입자가 원판의 가장자리에 충돌한다. 충돌하는 순간 원판의 가장자리 속도 성분과 입자의 속도 성분은 서로 반대 방향으로 나란하다. $v = r\omega$ 이고, 충돌 후 입자와 원판이 한 덩어리가 되어 운동한다면 충돌 후 각속도의 크기는? (단, 원판의 관성모멘트는 $\frac{1}{2}mr^2$ 이다.)

$(\frac{1}{2}mr^2)\omega - mr^2\omega = (\frac{1}{2}mr^2 + mr^2)\omega'$

정답 : $(-)\frac{\omega}{3}$

강체의 운동에너지

운동하는 물체는 운동에너지를 갖는다. 질점이 1개로 구성된 입자 형태의 물체라면 운동에너지는 질점의 질량 m 과 질점의 속력 v 로 표현하며 $\frac{1}{2}mv^2$ 이 된다. 강체는 여러 개의 질점들로 구성이 되어 있으므로 강체가 갖는 운동에너지는 각각의 질점들의 운동에너지의 총 합이다.

1. 병진 운동에너지 : 강체가 회전 운동 없이 위치의 변화만 있는 병진 운동을 할 때 질점들의 운동에너지의 총 합

모든 질점들의 속력이 같다. $\Sigma(\frac{1}{2}mv^2) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \cdots)v^2 = \frac{1}{2}Mv^2$

$E_k = \frac{1}{2}Mv^2$ (M : 강체의 총 질량, v : 강체의 병진속도)

2. 회전 운동에너지 : 강체가 병진 운동 없이 회전 운동만 할 때 질점들의 운동에너지의 총 합

모든 질점들의 각속력이 같다. $\Sigma(\frac{1}{2}mv^2) = \Sigma(\frac{1}{2}m(r\omega)^2) = \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \cdots)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$

$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$ (I : 강체의 관성모멘트, ω : 강체의 각속도)

기본 예제 69

고정된 중심축 주위에 자유로이 회전할 수 있는 질량 M , 반지름 R 인 도르래에 실을 감고 실의 끝에 질량 m 인 추를 매어 정지 상태에서 지면으로부터 높이 h 에서 낙하시켰을 때 추가 지면에 닿는 순간의 속력은? (단, 중력 가속도는 g , 도르래의 관성모멘트는 $\frac{1}{2}MR^2$ 이다.)

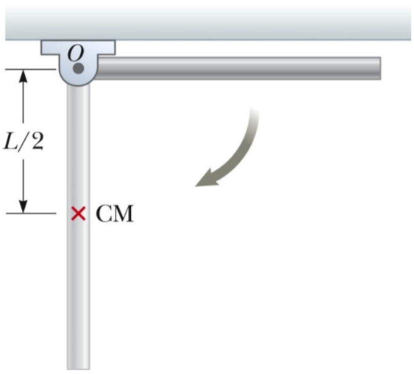
역학적 에너지 보존 : 감소한 에너지 = 증가한 에너지 (추의 병진 운동에너지 + 도르래의 회전 운동에너지)

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)(\frac{v}{R})^2 = \frac{1}{2}(m + \frac{M}{2})v^2$$

정답 : $\sqrt{\frac{4mgh}{2m+M}}$

기본 예제 70

길이가 L 이고 질량이 M 인 균일한 막대의 한쪽 끝이 통과하는 마찰이 없는 핀을 중심으로 회전하고 있다. 정지 상태에 있던 이 막대를 수평 위치에서 놓는다. (단, 중력 가속도는 g 이고, 막대의 회전축에 대한 관성모멘트는 $\frac{1}{3}ML^2$ 이다.)



1) 막대가 가장 낮은 위치에 도달하는 순간 각속력은?

2) 막대가 가장 낮은 위치에 도달하는 순간 질량중심의 접선속력과 막대의 가장 낮은 점의 접선속력은?

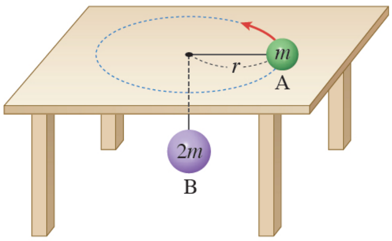
1) 역학적 에너지 보존 : $Mg(\frac{L}{2}) = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}ML^2)\omega^2$

2) 질량 중심 : $v_{CM} = r\omega = (\frac{L}{2})\omega$, 끝 점 : $v = (L)\omega$

정답 : 1) $\sqrt{\frac{3g}{L}}$, 2) $\frac{\sqrt{3gL}}{2}$, $\sqrt{3gL}$

기본 예제 71

질량이 각각 m , $2m$ 인 두 물체 A, B를 마칠이 없는 수평인 테이블의 구멍을 통과하는 실로 연결하여 그림과 같이 장치하였다. A는 반지름이 r 인 등속 원운동을 하고, B는 정지한 상태로 실에 매달려 있다. 이 때 B를 천천히 당겨 A의 원운동 반지름을 감소시킨다. (단, 물체의 크기와 공기의 저항은 무시한다.)



1) 각운동량은 보존되는가?

2) 역학적 에너지는 보존되는가?

1) 각운동량 보존 (A에 작용하는 장력은 r 에 대해 나란한 방향으로 A에 작용하므로 토크를 발생시키지 않는다.)

$$mr^2 \cdot \frac{v_i}{r} = mr'^2 \cdot \frac{v_f}{r'} \quad \therefore \; v_f = \frac{v_i r}{r'}$$

2) 속력이 증가했으므로 운동에너지는 증가하였다.

정답 : 1) 보존됨, 2) 보존되지 않음

역학적 평형

1. 정적 평형 : 크기가 있는 물체에 작용점이 다른 여러 힘이 작용하지만 물체가 병진 운동과 회전 운동을 하지 않고 그대로 정지해 있을 때, 정적 평형을 이룬다고 한다.

※ 병진 운동 : 물체가 전체적으로 한 위치에서 다른 위치로 움직이는 운동

※ 회전 운동 : 물체가 고정된 점을 중심으로 그 주위를 움직이는 운동

1) 정적 평형의 제 1 조건 : 물체에 작용하는 모든 힘의 합력이 0이 되어야 한다. 힘의 평형이 깨지면 물체의 질량 중심이 가속도 운동을 한다.

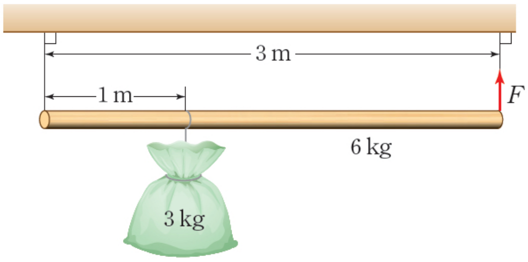
※ 병진 운동을 하지 않을 조건 : $\sum F_i = F_1 + F_2 + \cdots = 0$

2) 정적 평형의 제 2 조건 : 물체에 작용하는 모든 토크의 합이 0이 되어야 한다. 토크의 평형이 물체의 회전축을 중심으로 각가속도 운동을 한다.

※ 회전 운동을 하지 않을 조건 : $\sum \tau_i = \tau_1 + \tau_2 + \cdots = 0$

기본 예제 72

그림과 같이 실에 매달려 수평인 상태로 정지해 있는 원기둥 모양의 막대에 물체가 매달려 있다. 막대와 물체의 질량은 각각 $6kg$, $3kg$ 이고, 막대의 길이는 $3m$ 이다. 이때 오른쪽 실이 막대를 당기는 힘 F 의 크기는? (단, 막대의 밀도는 균일하며 중력 가속도 $10m/s^2$ 이다.)

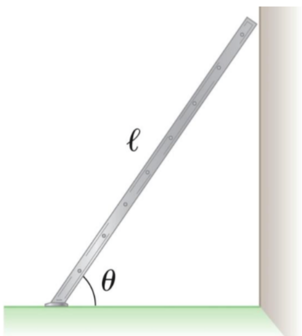


$1\times30+1.5\times60=3\times F$

정답 : $40N$

기본 예제 73

그림과 같이 마찰이 없는 수직 벽에 길이 l 인 균일한 사다리를 기대 세웠다. 사다리의 질량이 m 이고, 사다리와 지면 사이의 정지 마찰 계수가 μ 이라고 할 때, 사다리가 미끄러지지 않을 최소 각도 θ 에 대한 $\tan\theta$ 는?



f : 사다리와 지면 사이의 최대 정지 마찰력, N_1 : 지면이 사다리에 작용하는 수직항력,

N_2 : 벽이 사다리에 작용하는 수직항력

$\Sigma F=0$; $N_1=mg$, $N_2=f=\mu N_1=\mu mg$

$\Sigma\tau=0$; $\frac{l}{2}\times mg\cos\theta=l\times N_2\sin\theta$; $\frac{mg}{2N_2}=\tan\theta$; $\frac{1}{2\mu}=\tan\theta$

정답 : $\frac{1}{2\mu}$

ISBN 979-11-976004-9-4

정가 : 25,000원